LE GROUPE DES CLASSES D'UN ANNEAU INTÉGRÉ

par Alain BOUVIER

Département de Mathématiques, Université Claude-Bernard - Lyon I, Villeurbanne

RESUME

En utilisant la notion d'idéal divisoriel t-inversible (sur une idée de M. ZAFRULLAH), il est possible de définir pour un anneau intégre une notion de groupe des classes et de groupe local des classes qui redonne, dans le cas des anneaux de KRULL ou de PRUFER, les notions déjà connues et qui mesure, dans la classe des anneaux pseudo-prufériens le défaut d'existence des pgcd.

SUMMARY

Using t-invertible divisorial ideals and following M.ZAFRULLAH's idea, one can defined the class group and the local class group of every integral domain. It generalizes the usual class group for KRULL domains or PRÜFER domains and mesures how far from a G C D domain a P M V D is.

Tous les anneaux considérés sont commutatifs unitaires. Soit A un anneau intègre et k son corps des fractions. On désigne par I(A) l'ensemble des idéaux fractionnaires non nuls de A et par D(A) l'ensemble des idéaux divisoriels ou v-idéaux de A. Etant donné un idéal fractionnaire I, on note $I_v = A : (A : I)$ le v-idéal qu'il engendre. On note P(A) -resp. Cart(A) resp $I_f(A)$ - l'ensemble des idéaux (fractionnaires) principaux -resp. inversibles, resp. de type fini - de A. On dit qu'un idéal divisoriel I est <u>v-fini</u> s'il existe un idéal de type fini J tel que $I = J_v$. On note $D_f(A)$ l'ensemble des idéaux v-finis de A. On a ainsi les inclusions ci-après :

107e Congrès national des Sociétés savantes, Brest, 1982, sciences, fasc. IV, p. 85-92.

$$P(A) \hookrightarrow \mathrm{Cart}(A) \begin{matrix} \nearrow I_f(A) \longrightarrow \\ \searrow D_f(A) \hookrightarrow D(A) \longrightarrow \end{matrix} I(A)$$

On dit qu'un idéal I est un <u>t-idéal</u> [9] si pour tout idéal de type fini J inclus dans I, on a $J_v \subset I$. Étant donnés deux idéaux I et J, on peut voir dans [7] ou [9] que $(I_tJ_t)_t = (I_tJ)_t = (IJ)_t$.

<u>Définition</u>

On dit qu'un idéal divisoriel I est <u>t-inversible</u> s'il existe J tel que $(IJ)_t = A$.

Soit T(A) l'ensemble des idéaux divisoriels t-inversibles. On muni T(A) de la loi de composition $(I,J) \mapsto (IJ)_t$.

<u>Lemme 1</u>

a) $I \in D(A)$ est t-inversible si et seulement si $(I(A : I))_t = A$;

b) T(A) est un groupe contenu dans $D_f(A)$

<u>Démonstration</u>

a) S'il existe J tel que $(IJ)_t = A$, il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans IJ tels que $1 \in (x_1, \ldots, x_n)_v$. Mais $IJ \subset A$ implique $J \subset A : I$, donc $x_i \in I(A:I)$ d'où $1 \in (x_1, \ldots, x_n)_v \subset (I(A:I))_t \subset A$.

b) Soit $I \in T(A)$. Il existe $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $q_1, \ldots, q_n \in A:I$ tels que $1 \in J_v$ avec $J = (x_1q_1, \ldots, x_nq_n)$. Alors $I \subset IJ_v \subset (IJ)_v$. Par ailleurs $q_iI \subset A$ implique $x_iq_iA \subset x_iA \subset I$ et donc $JI \subset (x_1, \ldots, x_n) \subset I$. On en déduit alors $I \subset (IJ)_v \subset (x_1, \ldots, x_n)_v \subset I_v = I$. ∎

Le groupe T(A) est appelé le <u>T-groupe</u> de l'anneau intègre A.

On dit qu'un idéal I d'un anneau intègre A est <u>transportable</u> si $S^{-1}(A:I) = S^{-1}A : S^{-1}I$ pour toute partie multiplicative S de A.

<u>Lemme 2</u> .

a) Si I est transportable, alors $(S^{-1}I_v)_v = (S^{-1}I)_v$.

b) Tout idéal v-fini est transportable.

Démonstration

a) $S^{-1}I_v = S^{-1}(A:(A:I)) \subset (S^{-1}A : S^{-1}(A:I)) = S^{-1}A:(S^{-1}A:S^{-1}I) = (S^{-1}I)_v$ donc $(S^{-1}I_v)_v \subset (S^{-1}I)_v \subset (S^{-1}I_v)_v$.

b) Supposons que $I = J_v$ où J est de type fini. Alors $A:I = A:J$ et compte tenu de (a), on a :
$S^{-1}(A:I) = S^{-1}(A:J) = S^{-1}A:S^{-1}J = S^{-1}A:(S^{-1}J)_v = S^{-1}A:(S^{-1}I)_v = S^{-1}A:S^{-1}I$. ∎

L'ensemble des t-idéaux ordonné par inclusion est inductif et tout t-idéal maximal est premier.

Dans un anneau de MORI [11], les t-idéaux sont les v-idéaux finis. Par conséquent dans un anneau de KRULL, les t-idéaux maximaux sont les idéaux premiers de hauteur 1.

On dit qu'un idéal I est t-localement principal si IA_P est principal pour tout t-idéal maximal P.

Proposition 1

Un idéal transportable est inversible (respectivement t-inversible) si et seulement s'il est localement principal (respectivement t-localement principal).

Démonstration

Soit I un idéal transportable. Supposons I localement principal (respectivement t-localement principal) et soit $M \in \mathrm{Max}(A)$ (respectivement un t-idéal maximal). Si IA_M est principal alors $I(A:I)A_M = A_M$ et donc $I(A:I) = A$ (respectivement $(I(A:I))_t = A$). ∎

Ce résultat redonne, comme cas particulier [1-Th2-1] et [1-Th 2-2].

Notons que dans un anneau de KRULL, tout idéal est transportable [6, 5-5] et t-localement principal donc t-inversible.

Lemme 3

a) Dans un anneau de KRULL A, on a $T(A)=D(A)$;

b) Dans un anneau de PRÜFER A, on a $T(A)=I_f(A)$.

Démonstration

a) Soit A un anneau de KRULL et $I \in D(A)=D_f(A)$.

Etant donné un t-idéal maximal P, l'idéal IA_P est principal. En appliquant le lemme 2 on a $(I(A:I))A_P = IA_P(A_P:IA_P)=A_P$. Donc l'idéal $I(A:I)$ n'est contenu dans aucun t-idéal maximal ce qui entraine que $(I(A:I))_t=A$ et $I \in T(A)$.

b) Soit A un anneau de PRUFER. On a $I_f(A)=\mathrm{Cart}(A) \subset T(A)$. Réciproquement, si $I \in T(A)$ d'après le lemme 1 il existe $J \in I_f(A)$ tel que $I=J_v=J$ car $I_f(A) \subset D(A)$.

∎

Selon une idée de M. ZAFRULLAH, on introduit la définition suivante :

Définition 2

Etant donné un anneau intègre A, on appelle <u>groupe des classes de A</u> -respectivement <u>groupe local des classes de A</u> - le groupe $Cl(A)$ - resp. le groupe $G(A)$ - défini par $Cl(A)=T(A)/P(A)$ - resp. $G(A)=T(A)/\mathrm{Cart}(A)$ -

Compte tenu du lemme 3, lorsque A est un anneau de KRULL - resp. un anneau de PRUFER - $Cl(A)$ est l'habituel groupe des classes $D(A)/P(A)$ - resp. $I_f(A)/P(A)$.

Se pose alors la question de savoir ce que "mesurent" les groupes $Cl(A)$ et $G(A)$ c'est-à-dire que signifie pour A de dire que $Cl(A)=0$ ou que $G(A) = 0$? A défaut de répondre à cette question en toute généralité, nous répondrons dans une classe particulière d'anneaux, les anneaux pseudo-prüfériens [3] (encore appelés les PMVD dans [7], [10] ou [11]. Commençons par donner des conditions suffisantes pour que $Cl(A)$ et $G(A)$ soient nuls.

Rappelons ici quelques définitions. Soit A un anneau intègre

a) A est un GCD-domaine (ou est <u>pseudo-bezoutien</u> s'il vérifie les assertions équivalentes suivantes :
i) $aA \cap bA$ est principal quelques soient $a,b \in A$,
ii) $D_f(A) = P(A)$.

b) A est un <u>GCD-domaine généralisé</u> [2] s'il vérifie les assertions équivalentes suivantes :

i) $aA \cap bA$ est inversible quelques soient $a,b \in A - \{0\}$;
ii) $D_f(A) = \mathrm{Cart}(A)$.

c) A est un <u>PMVD</u> (ou est <u>pseudo-prüférien</u>) si $D_f(A)$ est un groupe pour la loi $(I,J) \mapsto (IJ)_v$.

Exemples de PMVD : les anneaux de PRUFER, les anneaux de KRULL, les GCD-domaines, les GCD domaines généralisés et les anneaux cohérents intégralement clos [11].

<u>Lemme</u> 4

Un anneau intègre de corps des fractions k est un PMVD si et seulement si $T(A)=D_f(A)$.

<u>Démonstration</u>

Si A est un PMVD, soit $I \in D_f(A)$. Il existe $x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_m$ dans k tels que $I = (x_1,\dots,x_n)_v$ et $A : I = (y_1,\dots,y_m)_v$. Alors
$A=(I(A:I))_v=((x_1,\dots,x_n)(y_1,\dots,y_m))_v=((x_1,\dots,x_n)(y_1,\dots,y_m))_t=((x_1,\dots,x_n)_v(y_1,\dots,y_m)_v)_t = (I(A:I))_t$
car pour un idéal de type fini K, on a $K_v = K_t$. Donc $I \in T(A)$.
Réciproquement, si $T(A)=D_f(A)$ et si $I \in D_f(A)$, on a
$A = (I(A:I))_t \subset (I(A:I))_v \subset A$; donc I est v-inversible et $A:I \in T(A) \subset D_f(A)$.
□

<u>Proposition</u> 2 (BOUVIER-ZAFRULLAH)

Soit A un PMVD

a) $Cl(A)=0$ si et seulement si A est un GCD-domaine.

b) $G(A)=0$ si et seulement si A est un GCD-domaine généralisé.

Démonstration

Conséquence immédiate des définitions et du lemme 4.

□

En particulier, on retrouve des résultats bien connus sur Cl(A) - voir [3] et G(A) - voir [5].

a) Soit A un anneau de KRULL ; Cl(A)=0 -resp. G(A)=0 - si et seulement si A est factoriel -res. localement factoriel.

b) Soit A un anneau de PRUFER ; on a G(A)=0 , et Cl(A)=0 si et seulement si A est de BEZOUT.

Lemme 5 (ZAFRULLAH)

Tout idéal premier associé est un t-idéal.

Proposition 3

Soit A un anneau intègre. Pour que G(A)=0, il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

a) A est de PRUFER ;
b) A est réflexif ;
c) dim A = 1 ;
d) A est localement un GCD-domaine.

Démonstration

a) Trivial.

b) Si tout idéal non nul est divisoriel, étant donné $I\in T(A)$ l'idéal $I(A:I)$ est divisoriel donc $A=(I(A:I))_t\subset I(A:I)_v=I(A:I)\subset A$ d'où $I(A:I)=A$.

c) Soit $M\in Max(A)$. Puisque M est de hauteur 1, c'est un idéal premier associé, donc un t-idéal maximal (lemme 5) et donc, dans A les t-idéaux maximaux sont les idéaux maximaux. Un élément I de T(A) étant transportable (lemme 2), les idéaux t-inversibles sont les idéaux inversibles (proposition 1).

d) Soient $I\in T(A)$ et $M\in Max(A)$. Ecrivons

$I = (x_1, \ldots, x_n)_v$. Alors (lemme 2) $IA_M = ((x_1, \ldots, x_n)A_M)_v$ donc est principal. On conclut à nouveau en appliquant la proposition 1.

∎

Pour qu'un anneau intègre local A soit tel que $Cl(A)=0$ il suffit donc qu'il vérifie l'une des conditions suivantes :

a) A est de valuation ;
b) A est réflexif ;
c) A est de dimension 1
d) A est un GCD-domaine.

Problèmes

1) Que signifient $Cl(A)$-resp.$G(A)$ - de torsion ?

2) Etant donné un homomorphisme d'anneaux $A \to B$ quels liens existent-ils entre $Cl(A)$ et $Cl(B)$ resp. entre $G(A)$ et $G(B)$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON (D.D.) - A paraître.- Globalisation of some local properties in Krull domains.

[2] ANDERSON (D.D.) ANDERSON (D.F.) - 1980.- Generalised GCD-domains. Comment. Math. Univ. St Paul 28, n°2, 215-221.

[3] BOURBAKI (N.) Algèbre commutative. Chap. 1 à 7, Hermann.

[4] BOUVIER (A.) - 1980.- Survey of locally factorial Krull domains. Pub. Dept. Math. Lyon 17-1, 1-31.

[5] BOUVIER (A.) - The local class group of a Krull domain. Canad. Bull. Math.

[6] FOSSUM (R.) - 1973.- The divisor class group of a Krull domain. Springer Verlag band 74.

[7] GILMER (R.) - 1972.- Multiplicative ideal theory. Marcel Dekker.

[8] GRIFFIN (M.) - 1967.- Some results on v-multiplication rings. Canad. J. Math. 19, 710-722.

[9] JAFFARD (P.) - 1960.- Les systèmes d'idéaux. Dunod Paris.

[10] MOTT (J.L.) ZAFRULLAH (M.) - On Prüfer v-multiplication domains.

[11] PAPICK (I.J.) - A note on Prüfer v-multiplication domains.

[12] QUERRE (J.) - 1975.- Sur les anneaux réflexifs. Canad. J. Math. Vol XXVII, n° 6, 1222-1228.

[13] QUERRE (J.) - 1976.- Cours d'algèbre. Masson.